



# CONCOURS

## Magistère de Développement Économique

### 1ère année

---

**Mardi 06 avril 2021**

**Durée : 2 heures**

**Documents et calculatrices non autorisés**

***Épreuve de Mathématiques-Statistiques***

Le sujet comporte **4 exercices - 3 pages** en comptant la page d'identification + **2 tables statistiques**. Vous devez vérifier en début d'épreuve le nombre de pages de ce fascicule. S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au surveillant.  
**Ce sujet doit être remis dans votre copie à la fin de l'épreuve**

*Sujet de Mme Marie-Eliette DURY*

**Exercice 1 - Répondre directement sur cette feuille et mettre la feuille dans la copie**

Dans cet exercice, veuillez cocher **une seule case** pour répondre à chaque question

**Question 1/** Deux événements **disjoints** sont toujours indépendants :

- ☐ VRAI  
☐ FAUX  
☐ Je ne sais pas

**Question 2/** Une **réunion** d'événements traduit toujours :

- ☐ un « OU exclusif »  
☐ un « ET »  
☐ un « OU non-exclusif »  
☐ Je ne sais pas

**Question 3/** Soit  $(X; Y)$  un vecteur aléatoire discret pour lequel  $X$  prend les valeurs  $a_i$  où  $(1 \leq i \leq n_X)$  et  $Y$  prend les valeurs  $b_j$  avec  $(1 \leq j \leq n_Y)$ . Parmi les définitions suivantes, laquelle est vraie pour les **lois marginales issues du vecteur aléatoire  $(X; Y)$**  ?

- ☐ les lois marginales sont données par les observations simultanées de  $X$  et de  $Y$  :  $P[(X; Y) = (a_i; b_j)]$   
☐ les lois marginales sont données par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> composante du vecteur :  $P(\{X = a_i\})$  et  $P(\{Y = b_j\})$   
☐ les lois marginales sont données par les intersections provenant de  $X$  et de  $Y$  :  $P[\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}]$   
☐ Je ne sais pas

**Question 4/** Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, alors leur covariance vaut zéro  $\text{cov}(X; Y) = 0$ . Est-ce que la réciproque est vraie ?

- ☐ OUI  
☐ NON  
☐ Je ne sais pas

**Question 5/** Dans une boîte contenant 10 jetons, numérotés de 0 à 9 (numéro écrit sur chaque jeton), on pioche 3 jetons. Quelle affirmation est correcte parmi les phrases suivantes ?

- ☐ Si on pioche simultanément les 3 jetons, c'est "non ordonné" et "avec répétition possible" donc c'est une liste  
☐ Si on pioche chaque jeton puis on le replace dans la boîte et on mélange les jetons avant de piocher le suivant, et on note l'ordre dans lequel on a obtenu les numéros, c'est "ordonné" et "avec répétition possible" donc c'est une combinaison  
☐ Si on pioche simultanément les 3 jetons, c'est "non ordonné" et "sans répétition possible" donc c'est une combinaison  
☐ Si on pioche chaque jeton et on ne le replace pas dans la boîte avant de piocher le jeton suivant, et on note l'ordre dans lequel on a obtenu les numéros, c'est "ordonné" et "avec répétition possible" donc c'est une liste  
☐ Si on pioche chaque jeton et on ne le replace pas dans la boîte avant de piocher le jeton suivant, et on ne note pas l'ordre dans lequel on a obtenu les numéros, c'est "non ordonné" et "sans répétition possible" donc c'est une liste  
☐ Je ne sais pas

## **Exercice 2 – Dans tout l'exercice, poser le détail des calculs et justifier clairement les valeurs données**

Dans une compagnie d'assurance, on a constaté que, parmi les 1200 assurés, 60 avaient envoyé une déclaration de sinistre dans l'année. On prélève au hasard et avec remise,  $n$  dossiers **parmi les 1200 dossiers** des assurés. Un dossier contenant une déclaration de sinistre est de « type S ». Notons l'événement  $S_i$ : « le  $i^{\text{ème}}$  dossier contient une déclaration de sinistre ». Soit  $X$  le nombre de dossiers de « type S » parmi les  $n$  dossiers prélevés.

Question 1/ Dans cette question, on prend  $n = 10$  dossiers

1.a/ Justifier la construction de la loi binomiale de la variable aléatoire  $X$  et expliquer le rôle et la construction de la probabilité de 5%

1.b/ Exprimer l'événement puis lire dans une table à préciser (en justifiant) et écrire la/les valeur(s) numérique(s) de la probabilité pour qu'un seul dossier soit de « type S » parmi ces 10 dossiers

1.c/ Exprimer l'événement puis lire dans une table à préciser (en justifiant) et écrire la/les valeurs numériques de la probabilité pour qu'il y ait au moins un dossier de « type S » parmi ces 10 dossiers

Question 2/ Dans cette question, on prend  $n = 60$  dossiers

2.a/ Justifier l'approximation de la loi de binomiale de  $X$  par une loi de Poisson de paramètre 3

2.b/ Exprimer l'événement puis lire dans une table à préciser (en justifiant) et écrire la/les valeur(s) numérique(s) de la probabilité d'avoir au plus 2 dossiers de « type S » parmi ces 60 dossiers

Question 3/ Un client, voulant déclarer un sinistre, téléphone à la hotline de l'entreprise. Le temps d'attente au téléphone, avant d'avoir un conseiller, est une variable aléatoire  $T$  dont la densité de probabilité est donnée par

$$f(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0$$

$$f(t) = 2k \exp(-t) \quad \text{si } t > 0$$

3.a/ Prouver que  $k = \frac{1}{2}$  en détaillant votre raisonnement. En déduire la fonction de répartition de  $T$ .

3.b/ Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit de moins de 3 minutes ?

## **Exercice 3 – Dans tout l'exercice, poser le détail des calculs et justifier votre raisonnement**

Dans les questions 1 et 2, Exprimer lorsque c'est possible  $A \times B$  et  $B \times A$  en posant le détail des calculs

Question 1 : Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 2 : Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Question 3 : Calculer le déterminant  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

## **Exercice 4 – Dans tout l'exercice, poser le détail des calculs et justifier votre raisonnement**

Déterminer l'expression explicite de  $u_n$  en fonction de  $n$  pour  $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$  avec  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 5$

# TABLES DE DISTRIBUTIONS DISCRETES

1/ Table de distribution binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  :  $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

n	k	p									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
2	0	0,9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	0,0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	0,0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	0,8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	0,1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	0,0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	0,0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	0,8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	0,1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	0,0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	0,0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0750	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	0,0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	0,7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	0,2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	0,0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	0,0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	0,0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	0,0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	0,7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	0,2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	0,0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	0,0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	0,0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	0,0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	0,0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	0,6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	0,2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	0,0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	0,0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	0,0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	0,0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	0,0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
8	0	0,6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	0,2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	0,0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	0,0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	0,0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
	5	0,0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	0,0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	0,0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
9	0	0,6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	0,2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	0,0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	0,0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	0,0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	0,0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	0,0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	0,0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	0,5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	0,3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	0,0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	0,0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	0,0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	0,0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	0,0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	0,0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	0,0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010

NOTE. — Les points placés au début des probabilités sont à remplacer par 0, Exemple : .9025 signifie 0,9025.



1/ Tables de loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  :

$$p(k, \lambda) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

[illegible]

$\lambda$	8		9		10		11		12		13		14	
$k$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$
0	0,0003	0,0003	0,0001	0,0001										
1	0,0027	0,0030	0,0011	0,0012	0,0005	0,0005	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001				
2	0,0107	0,0138	0,0050	0,0062	0,0023	0,0028	0,0010	0,0012	0,0004	0,0005	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
3	0,0286	0,0424	0,0150	0,0212	0,0076	0,0104	0,0037	0,0049	0,0018	0,0023	0,0008	0,0010	0,0004	0,0005
4	0,0573	0,0996	0,0337	0,0550	0,0189	0,0293	0,0102	0,0151	0,0053	0,0076	0,0027	0,0037	0,0013	0,0018
5	0,0916	0,1912	0,0607	0,1157	0,0378	0,0671	0,0224	0,0375	0,0127	0,0203	0,0070	0,0107	0,0037	0,0055
6	0,1221	0,3134	0,0911	0,2068	0,0631	0,1302	0,0411	0,0786	0,0255	0,0458	0,0152	0,0259	0,0087	0,0142
7	0,1396	0,4530	0,1171	0,3239	0,0901	0,2203	0,0646	0,1432	0,0437	0,0895	0,0281	0,0540	0,0174	0,0316
8	0,1396	0,5925	0,1318	0,4557	0,1126	0,3329	0,0888	0,2320	0,0655	0,1550	0,0457	0,0997	0,0304	0,0620
9	0,1241	0,7166	0,1318	0,5874	0,1251	0,4580	0,1085	0,3405	0,0874	0,2424	0,0661	0,1658	0,0473	0,1093
10	0,0993	0,8159	0,1186	0,7060	0,1251	0,5831	0,1194	0,4599	0,1048	0,3472	0,0859	0,2517	0,0663	0,1756
11	0,0722	0,8881	0,0970	0,8030	0,1137	0,6968	0,1194	0,5793	0,1144	0,4616	0,1015	0,3532	0,0844	0,2600
12	0,0481	0,9362	0,0728	0,8758	0,0948	0,7916	0,1094	0,6887	0,1144	0,5760	0,1099	0,4631	0,0984	0,3584
13	0,0296	0,9658	0,0504	0,9261	0,0729	0,8645	0,0926	0,7813	0,1056	0,6816	0,1099	0,5730	0,1060	0,4644
14	0,0169	0,9827	0,0324	0,9585	0,0521	0,9166	0,0728	0,8541	0,0905	0,7721	0,1021	0,6751	0,1060	0,5704
15	0,0090	0,9918	0,0194	0,9780	0,0347	0,9513	0,0534	0,9075	0,0724	0,8445	0,0885	0,7636	0,0989	0,6693
16	0,0045	0,9963	0,0109	0,9889	0,0217	0,9730	0,0367	0,9442	0,0543	0,8988	0,0719	0,8355	0,0866	0,7559
17	0,0021	0,9984	0,0058	0,9947	0,0128	0,9857	0,0237	0,9679	0,0383	0,9371	0,0550	0,8905	0,0713	0,8272
18	0,0009	0,9993	0,0029	0,9976	0,0071	0,9928	0,0145	0,9824	0,0255	0,9626	0,0397	0,9302	0,0554	0,8826
19	0,0004	0,9997	0,0014	0,9989	0,0037	0,9965	0,0084	0,9908	0,0161	0,9787	0,0272	0,9574	0,0409	0,9235
20	0,0002	0,9999	0,0006	0,9996	0,0019	0,9984	0,0046	0,9954	0,0097	0,9884	0,0177	0,9751	0,0286	0,9521
21	0,0001	1,0000	0,0003	0,9998	0,0009	0,9993	0,0024	0,9978	0,0055	0,9939	0,0109	0,9660	0,0191	0,9712
22			0,0001	0,9999	0,0004	0,9997	0,0012	0,9990	0,0030	0,9969	0,0065	0,9925	0,0121	0,9833
23				1,0000	0,0002	0,9999	0,0006	0,9996	0,0016	0,9985	0,0037	0,9962	0,0074	0,9907
24					0,0001	1,0000	0,0003	0,9999	0,0008	0,9993	0,0020	0,9982	0,0043	0,9950
25							0,0001	1,0000		0,0004	0,9997	0,0010	0,9992	0,0024 9974
26									0,0002	0,9999	0,0005	0,9997	0,0013	0,9987
27									0,0001	1,0000	0,0002	0,9999	0,0007	0,9994
28											0,0001	1,0000	0,0003	0,9997
29													0,0002	0,9999
30													0,0001	1,0000
31														
32														